



تکلیف شماره سه - موعده تحویل: یکشنبه ۸/۲۳ - نحوه ارائه جواب: دستی ابتدای کلاس

دانشجویان گرامی توجه نمایند سؤالات (*) دار صرفاً جهت آشنایی با نمونه سؤالات امتحانی داده شده و نمره‌ای برای آنها منظور نشده است لذا نیازی به تمویل این دسته از سؤالات نیست.

۱- تولیدکننده‌ای می‌خواهد از محصولات ۱ و ۲ به ترتیب به اندازه‌ی x_1 و x_2 واحد تولید کند. او می‌داند که تقاضا برای محصول ۱ متغیر تصادفی D_1 با تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f_{D_1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{5000}(100 - y) & ; 0 \leq y \leq 100 \\ 0 & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

همچنین تقاضا برای محصول ۲، متغیر تصادفی D_2 با توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱۰۰ است. قیمت فروش هر واحد از محصول ۱، ۵۰۰۰ ریال و هزینه تولید هر واحد آن ۳۰۰۰ ریال و قیمت فروش هر واحد از محصول ۲، ۱۰۰۰ ریال و هزینه تولید هر واحد آن ۵۰۰ ریال می‌باشد. بودجه این تولیدکننده برای تولید محصولات ۱ و ۲، ۱۵۰۰۰۰ ریال است. هدف این تولیدکننده آن است که x_1 و x_2 را چنان تعیین کند که متوسط سود حاصل از فروش این دو محصول، با در نظر گرفتن محدودیت بودجه ماکزیمم شود. تابع هدف این مسئله، جواب بهینه متغیرهای x_1 و x_2 و مقدار بهینه تابع هدف را به دست آورید.

۲- اکستریم‌های مطلق توابع زیر را روی فاصله داده شده مناسبه نمایید.

$$\bullet \quad f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \quad \text{روی فاصله } [-1, 2]$$

$$\bullet \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x} \quad \text{روی فاصله } [-1, \frac{2}{3}]$$

۳- مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x, y) = xy$ را بر روی فم زیر به دست آورید.

$$x = 3 \cos t$$

$$y = 2 \sin t$$

$$0 \leq t \leq \pi$$

۴- مسئله برنامه ریزی زیر را با استفاده از روش لاگرانژ حل کنید.

$$\min Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$



۵- مسئله برنامه ریزی غیرخطی با محدودیت زیر را در نظر بگیرید:

$$\max f(x) = \ln(x_1 + 1) + x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

با استفاده از شرایط کاروش-کاهن-تاکر جواب نقطه ساکن (پایداری) آن را به دست آورید.

۶- مسئله برنامه ریزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max f(x_1, x_2) = 10x_1 + 8x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

با استفاده از شرایط کاروش-کاهن-تاکر مقدار بهینه هریک از متغیرها و جواب بهینه مدل را به دست آورید.

۷- فرمانده یک پایگاه نظامی می‌خواهد برای سربازان آن پادگان پوتین سفارش دهد. این فرمانده می‌تواند پوتین‌هایی با

سه اندازه کوچک، متوسط و بزرگ سفارش دهد. اگرچه او دقیقاً نمی‌داند که به چه تعدادی از هر اندازه پوتین نیاز دارد.

ولی می‌داند که تقاضا برای سه اندازه پوتین از یکدیگر مستقل است و تقاضا برای هر اندازه پوتین دارای توزیع احتمالی

پیوسته یکنواخت بین ۰ و ۳۰۰۰ جفت است. هدف فرمانده این است که بودجه ۴۰۰۰ تومانی خود را به سه اندازه

پوتین چنان اختصاص دهد که تعداد متوسط سربازانی را که پوتین مناسب نصیبشان می‌شود، ماکزیمم کند. فرض کنید

که هزینه پوتین کوچک جفتی ۱ تومان، پوتین متوسط جفتی ۲ تومان و پوتین بزرگ جفتی چهار تومان، تعداد سفارش

داده شده از پوتین اندازه $X_i = i$ وقتی که i برابر ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب برای پوتین اندازه کوچک، متوسط و بزرگ است.

همچنین اگر Z_i برابر با تعداد سربازانی که صامب پوتین مناسب از اندازه i شده‌اند باشد در این صورت مدل مسئله،

جواب بهینه تابع هدف و مقدار بهینه هریک از متغیرها را به دست آورید.

- همچنین اگر ضرایب لاگرانژ مربوط به محدودیت بودجه و شرط علامت روی X_1 ، X_2 و X_3 به ترتیب برابر M_1 ، M_2 ، M_3

و M_4 باشند، به ازای افزایش ۱ واحد به بودجه ۴۰۰۰ تومانی، حداکثر تابع هدف چقدر افزایش می‌یابد؟ مقدار بهینه

M_4 و M_3 ، M_2 چقدر است؟

۸- تابع هدف زیر را با توجه به بازه تعریف برای x طبق الگوریتم فیبوناچی مداخل کنید.

$$z = x^2 + 2x$$

$$-3 \leq x \leq 5$$

۹- روش سریع‌ترین کاهش برای مینیمم‌سازی تابع زیر را با توجه به نقطه‌ی آغازین $(۳, ۲, ۰)$ به کار ببرید.

$$f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - 4xy$$



۱۰- دنباله حاصل از روش نیوتن را برای مینیم کردن تابع زیر به دست آورید. (x)

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 x_2^2$$

۱۱- فرم قطبی مسئله برنامه ریزی کسری زیر به چه صورت است؟

$$\text{Max } z = \frac{2x_1 + 3x_2 + 4}{x_1 + 2x_2 - 20}$$

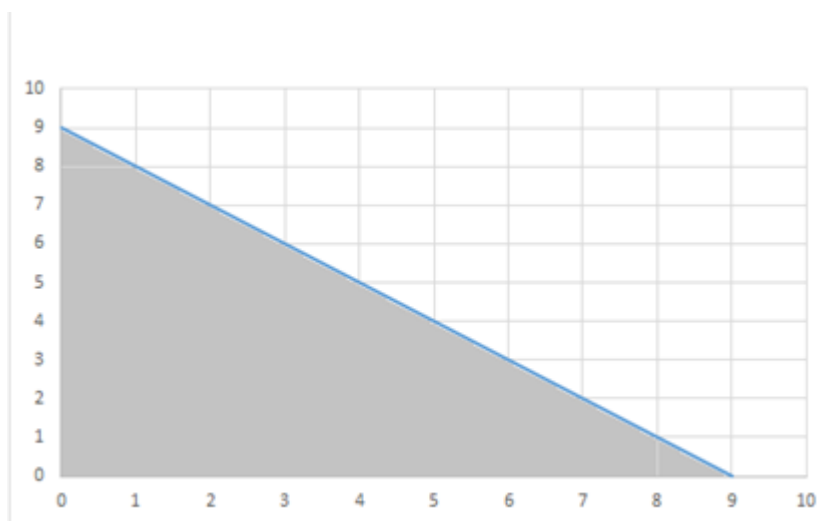
$$5x_1 + 4x_2 \leq 20$$

$$4x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

۱۲- مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع زیر را بر روی ناحیه مثلثی شکل زیر به دست آورید. (x)

$$f(x, y) = 2 - x^2 - y^2 + 2x + 2y$$



۱۳- در تابع هدف زیر دامنه Z را تعیین نمایید. (x)

$$Z = x_1 + x_2$$

$$4 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مرتضی راستی برزگی

rasti.iut.ac.ir